

Г. И. Пеникас, В. Б. Симакова

Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей¹

В работе проводится анализ оценки основных характеристик рыночного риска (при разных сроках заимствования), осуществляемой с помощью многомерных копула-моделей распределения соответствующих доходностей и с помощью традиционных методов моделирования, пренебрегающих асимметричностью этого распределения и «тяжестью» его хвостов. Одновременно демонстрируются возможности пакета R в практической реализации копула-моделирования.

В ходе копула-моделирования совместного распределения доходностей, отвечающих разным срокам заимствования, выявлено, что совместное движение процентных ставок носит асимметричный характер (ставки более склонны к одновременному росту, нежели к одновременному снижению). Показано, что использование копула-моделирования позволяет снизить завышенную традиционную оценку количества «пробоев» границы потерь процентного риска на 7–13% (величина коррекции зависит от заданного «уровня доверия»).

1. Введение. Цель исследования

Кризис «плохих» долгов, первоначально проявившийся в США, а затем распространившийся на экономики всего мира, поставил под угрозу достаточность капитала большинства коммерческих банков. Многочисленные списания невозвращенных ссуд фиксировались как убытки текущего периода и снижали величину капитала кредитных организаций. Именно для поддержания достаточного размера капитала правительства и центральные банки США, Евросоюза, России пошли на такую меру, как предоставление субординированных кредитов, которые законодательство разрешает учитывать в объеме собственных средств банка².

Целью данного исследования является разработка оптимальной модели оценки процентного риска, позволяющей прогнозировать изменение величины капитала банка (его ожидаемой приведенной стоимости).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описываются подходы к измерению процентного риска с акцентом на подходы к прогнозированию кривой доходности, изменение которой является источником процентного риска. Раздел 3 посвящен описанию методологии исследования. В разделе 4 описаны данные, на основе которых проводится эконометрическое моделирование. В разделе 5 приведены его результаты. Итоговые выводы даны в разделе 6.

¹ Авторы выражают огромную благодарность С. А. Айвазяну за научное руководство при подготовке данного исследования.

² См. п. 3.5.2 Положения ЦБ РФ № 215-П и п. 49(XII) в [BCBS (2006)] (последний источник отражает рекомендации известного соглашения по регулированию достаточности капитала кредитных организаций «Базель II»).

2. Подходы к измерению процентного риска

Процентный риск является видом рыночного риска и определяется как ожидаемые потери от изменения процентных ставок вследствие наличия разрывов (гэпов) между активами и пассивами банка. Данный риск, как и прочие виды банковских рисков, несет в себе источник прибыли. Иначе при отсутствии разрывов (т. е. в случае полностью сбалансированной срочной структуры баланса банка) банк получал бы небольшую маржу между активными и пассивными операциями, которой не хватало бы даже для покрытия операционных расходов.

В целях управления процентным риском рассматривают два вида разрывов активов-пассивов: ликвидности и переоценки. Первый позволяет оценить процентный риск, относящийся к чистым активам банка, второй — к процентным доходам. Также разрывы разделяют по характеру срока активов и пассивов на контрактный (срок закреплён в договоре) и поведенческий, или ожидаемый контрактный (когда определяется вероятная срочность актива или обязательства).

На текущий момент существуют два основных подхода к измерению процентного риска в соответствии с международным соглашением по оценке достаточности капитала «Базель II»: стандартизованный и продвинутый (или «подход внутрибанковских моделей»). Отметим, что законодательные документы³ требуют измерения процентного риска лишь по торговому портфелю ценных бумаг с фиксированной доходностью (облигаций), тогда как изменение процентных ставок влияет на приведенную стоимость всех активов и пассивов. Поэтому данное исследование концентрируется на анализе разрыва всех активов и пассивов, а не отдельно взятого торгового портфеля.

2.1. Стандартизованный подход

Самым простым из применяемых банками подходом для измерения процентного риска является стандартизованный. Он предполагает разнесение активов и пассивов (как упоминалось выше, для торгового портфеля это означает выделение длинных и коротких позиций в ценных бумагах) либо по контрактным срокам, либо по дюрации. Дюрация отражает чувствительность изменения цены облигации к изменению процентной ставки, т. е. верно в непрерывном времени

$$D = \frac{-\partial P}{\partial r}$$

или в дискретном

$$D = -\frac{\Delta P}{\Delta r},$$

где D — дюрация;

P — цена облигации;

r — общая процентная ставка в экономике.

³ При этом если Банк России требует расчета рыночного (и соответственно процентного) риска, только если «суммарная величина текущих (справедливых) стоимостей финансовых инструментов равна или превышает 5% величины балансовых активов кредитной организации» [Положение № 313-П, п. 1.3.1], то Федеральная резервная система (ФРС) США обязывает рассчитывать рыночный риск, когда его величина (в целях документа равная сумме всех торговых активов и пассивов) превышает 10% совокупных активов или 1 млрд долл. [USGAO (1998), p. 121].

Несмотря на то что дюрация есть мера эластичности цены облигации по ставке, ее часто используют как меру срочности ценной бумаги.

Экзогенно каждому временному интервалу в зависимости от уровня купона по облигации приписывается коэффициент риска, который отражает потери вследствие ожидаемых колебаний процентных ставок соответствующего срока.

Как видно из приводимой ниже табл. 1 «Базель II» [см. BCBS (2006), п. 718 (iv)], коэффициент риска возрастает с ростом срочности актива, что является следствием следующей функциональной связи, заложенной в определении дюрации как меры срочности ценной бумаги:

$$\Delta P = -D \cdot \Delta r. \quad (1)$$

Соответственно чем выше срочность актива (пассива), тем к большему изменению его стоимости приведет одно и то же изменение процентной ставки.

Таблица 1

Коэффициенты риска в зависимости от срока до погашения

Купон 3% и выше	Купон менее 3%	Коэффициент риска, %	Предполагаемое изменение доходности
1 месяц и менее	1 месяц и менее	0,00	1,00
От 1 до 3 месяцев	От 1 до 3 месяцев	0,20	1,00
От 3 до 6 месяцев	От 3 до 6 месяцев	0,40	1,00
От 6 до 12 месяцев	От 6 до 12 месяцев	0,70	1,00
От 1 до 2 лет	От 1 до 1,9 года	1,25	0,90
От 2 до 3 лет	От 1,9 до 2,8 года	1,75	0,80
От 3 до 4 лет	От 2,8 до 3,6 года	2,25	0,75
От 4 до 5 лет	От 3,6 до 4,3 года	2,75	0,75
От 5 до 7 лет	От 4,3 до 5,7 года	3,25	0,70
От 7 до 10 лет	От 5,7 до 7,3 года	3,75	0,65
От 10 до 15 лет	От 7,3 до 9,3 года	4,50	0,60
От 15 до 20 лет	От 9,3 до 10,6 года	5,25	0,60
Свыше 20 лет	От 10,6 до 12 лет	6,00	0,60
	От 12 до 20 лет	8,00	0,60
	Свыше 20 лет	12,50	0,60

Положение ЦБ РФ № 313-П вводит аналогичные соглашению «Базель II» жесткие коэффициенты риска для расчета процентного риска, как в случае «купон 3% и выше» из табл. 1. Тем не менее при таком подходе сохраняется проблема, что будет не учитываться характер со-

вместного изменения факторов риска (в данном случае процентных ставок) как для разных сроков, так и для разных стран.

2.2. Внутрибанковские модели

Для построения более гибкой системы управления рисками и ухода от описанных выше проблем — при наличии разрешения надзорного органа страны — «Базель II» разрешает кредитным организациям использовать внутренние модели.

Как отмечено в работе [Prefontaine, Desrochers (2006)], основной внутрибанковской моделью измерения процентного риска является граница потерь ожидаемой стоимости капитала (Expected Value of Equity-at-Risk — EVEaR)⁴ на заданном временном горизонте при принятом уровне вероятности. Принцип ее расчета состоит в оценке приведенной стоимости чистых активов при текущих и ожидаемых процентных ставках. Соответственно граница потерь определяется как квантиль заданного уровня α распределения разницы данных приведенных стоимостей.

Таким образом, подчеркнем, что управление процентным риском основано на получении прогнозов кривой доходности. Поэтому подробнее остановимся на подходах к ее прогнозированию.

Важным этапом в прогнозировании кривой доходности стала работа Нельсона—Сигеля [Nelson, Siegel (1987)], в которой предлагается параметризация кривой доходности в форме выделения трех компонент (кратко-, средне- и долгосрочной) при ее прогнозировании.

На российских данных такой подход с применением фильтрации по Калману был реализован коллективом авторов под руководством Г. Гамбарова для получения кривой доходности ОФЗ [Гамбаров и др. (2004)], [Гамбаров и др. (2006)].

Отметим также статью [Чеготов, Лобанов (2006)], в которой предложен интересный подход к прогнозированию кривой доходности, когда данные о котировках купонных ОФЗ используются в однофакторной модели Нельсона—Сигеля ($B_2 = 0$), предполагающей в качестве входных данных котировки бескупонных облигаций. Для анализа взяты котировки шести выпусков ОФЗ с 3 декабря 2003 г. по 31 августа 2006 г. и ставки MIACR на 1 день.

Полученная кривая доходности в среднем соответствует наблюдавшимся значениям, хотя авторами отмечена проблема выбросов вследствие пиковых значений ставок MIACR, которые на самом деле включают надбавку за корпоративный риск в дополнение к суверенному уровню (см. табл. 7). Применяется также фильтрация по Калману, позволяющая разрешить данную проблему.

Несмотря на прозрачность и простоту подхода параметрических моделей, в настоящее время наиболее активно используемыми моделями прогнозирования кривой доходности являются аффинные модели с вложенным в них фильтром Калмана.

Развитие первой группы моделей началось в 1977 г. с работы Васичека [Vasicek (1977)]. Позднее она была подробнее описана Даффи и Каном [Duffie, Kan (1996)], а также Даем и Синглетоном [Dai, Singleton (1998)].

⁴ Необходимо отметить, что EVEaR есть именно мера границы потерь заданного уровня α , а не средние ожидаемые потери уровня α согласно терминологии, предложенной в статье [Фантаццини (2008)]. В данном случае понятие ожидаемой стоимости эквивалентно понятию приведенной, или дисконтированной, поскольку при расчете будет определяться стоимость будущих денежных потоков по состоянию на текущий момент с учетом дисконт-факторов (ими будут выступать процентные ставки на соответствующие сроки).

Так, в работе [Duffie, Kan (1996)] вводится форма аффинной модели, в которой доходность Y_{it} в момент t на срок τ_i определяется значением вектора факторов X_t по следующей формуле:

$$Y_{it} = - \frac{A(\tau_i) + B(\tau_i)X_t}{\tau_i}, \quad (2)$$

где $A(\tau_i), B(\tau_i)$ — коэффициенты, зависящие от срока τ_i и удовлетворяющие граничным условиям $A(0) = 0$ и $B(0) = 0$. Данное условие выводится из факта, что если аффинная зависимость вида $\alpha + \beta \cdot x = 0$ имеет место для всех x в некотором непустом открытом евклидовом пространстве, то из этого следует, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ [см. Duffie, Kan (1996), с. 383].

При этом вводится условие отсутствия арбитража, когда

$$A(\tau_i) = B_j(\tau_i), \quad \forall i \neq j.$$

Авторы отмечают, что, существует два подхода к выбору факторов X : непосредственное взятие значений из кривой доходности или их получение путем косвенных преобразований. Учитывая сложность калибровки ковариационной матрицы по отношению к эмпирическим наблюдениям в последнем случае, авторы отдают предпочтение первому подходу.

В работе также указано, что, несмотря на традиционность выбора краткосрочной ставки («овернайт») как фактора, это не является обязательным условием, так как настоящую мгновенную ставку наблюдать невозможно.

Для всех перечисленных работ характерно предположение о симметричном характере движения процентных ставок, т. е. принимается гипотеза о наличии многомерного нормального совместного распределения для приростов процентных ставок. Тем не менее другие авторы [Juncker, Szimayer, Wagner (2003)] отказались от данной предпосылки и постарались спрогнозировать кривую доходности через применение копулы к моделированию инноваций, т. е. компоненты шума в модели временного ряда.

В основе их исследования лежат ежемесячные котировки доходностей американских казначейских облигаций с 1982 по 2001 г.

Авторы анализируют аффинную модель срочной структуры процентных ставок, в которой рассматриваются два фактора — доходности для облигаций на срок 1 и 2 года. Копула используется для генерирования соответствующих остатков модели при помощи метода Монте-Карло. Для построения кривой доходности в рамках аффинной модели также применяется фильтр Калмана, хотя одновременно комментируются его недостатки, поскольку нарушается его базовая предпосылка о нормальном характере распределения исходных инноваций.

Для проверки годности полученных моделей используются 7 индикаторов: тесты Андерсона—Дарлинга, Колмогорова—Смирнова, AIC, BIC, относительное отклонение плотности вероятности нижнего и верхнего хвостов распределений и общий критерий согласия χ^2 .

В итоге исследования авторы делают вывод: обратная копула Франка дает лучшую подгонку модели к эмпирическим данным. Авторы подчеркивают, что полученные результаты возможно использовать для оценки VaR как квантиля распределения доходностей портфеля облигаций.

Отметим, что копулы начали активно применяться на Западе для управления рисками, поскольку позволяют не только определять совместное распределение с помощью частных

(маргинальных) и вида взаимосвязи при оценке (подробнее см. раздел «Понятие, свойства и виды копул»), но и моделировать неэллипсообразные многомерные распределения. Ниже кратко опишем преимущества копул и одновременно недостатки традиционных подходов (например, показателя линейной корреляции как меры зависимости). Далее обобщим исследования, в которых применялись копулы, и сделаем выводы о предпочтении одних или других в зависимости от целей работы и использованных данных.

Авторы Анэ и Каруби [Ane, Kharoubi (2003)] указывают на недостатки предположения о нормальности совместного распределения доходностей финансовых временных рядов и линейной корреляции как меры взаимосвязи случайных величин.

Вначале рассматриваются 4 семейства копул: гауссовская, Франка, Гумбеля, Кука—Джонстона. На эмпирических данных эти копулы оцениваются методом максимального правдоподобия с использованием ядерной оценки Силвермана для частных распределений. Результат оценки сравнивается с эмпирической копулой Дехивела. Наилучшая отбирается по трем критериям: простой и интегральный тесты Андерсона—Дарлинга и мера энтропии.

Показано, что копула Кука—Джонстона лучше приближает реальные данные, так как улавливает ненулевую зависимость отрицательных значений ([Longin, Solnik (1998)] показали, что корреляция между доходностями сильнее на «медвежьем» (падающем), нежели на «бычьем» (растущем) рынке).

Авторы проводят исследования на ежедневных котировках 6 индексов (FTSE100, DAX30, Nikkey 225, Hang Seng, S&P500 и NASDAQ) за период со 2 января 1987 г. по 31 декабря 2000 г.

Оценка копул применяется авторами для расчета рыночного риска через величину границы потерь уровня α — ГП(α). В работе показано, что предположение о гауссовском характере совместного распределения доходности дает оптимистичную оценку риска, недооценивая его. Также приводятся расчеты функции потерь, которые иллюстрируют, что выбор вида предельного распределения определяет точность расчета на 80%, а выбор структуры зависимости (копулы) — на 20%.

В работе [Clemen, Reilly (1999)] особое внимание уделяется роли корреляции в построении совместного распределения. Если в первой части анализируются подходы к оценке зависимости случайных величин, то во второй — проводится калибровка полученных оценок в зависимости от разных значений исходной корреляционной матрицы.

В первой части работы авторы рассматривают случайные величины X и Y , частные функции распределений которых — соответственно $F_X(x)$ и $G_Y(y)$. Анализируется согласованность мнений экспертов в выдаче оценок о трех видах зависимости:

- 1) линейная корреляция;
- 2) вероятность согласованности $P(X > x_1; Y > y_1)$;
- 3) оценка условных фрактилей:

$$E(F_X | y) = r(X, Y) \cdot (G_Y(y) - 0,5) + 0,5, \quad (3)$$

где $r(X, Y)$ — коэффициент корреляции двух случайных величин.

Респондентам предлагались три пары биржевых индексов из американской базы Compustat по сравнению с их расчетными значениями. Респондентам были представлены

гистограммы и иные описательные статистики маргинальных, но не совместных распределений. Несмотря на то что опрошенные были склонны занижать оценки первых двух видов зависимостей, авторы не отдают явного предпочтения какой-либо из трех для ее использования в качестве параметра копулы.

Во второй части работы была рассмотрена гипотетическая четырехфакторная модель стоимости актива, которую смоделировали, опираясь на многомерную нормальную копулу. Первым способом калибровки было изменение всей корреляционной матрицы от случая полной независимости (нулевые значения коэффициентов корреляции) до случая полной положительной зависимости (единичные коэффициенты). Вторым — изменение лишь ненулевых значений корреляции на $\pm 0,25\%$ (величина, равная среднему отклонению корреляции от расчетного значения по ответам респондентов). Существенной разницы в результатах калибровки выявлено не было. Общая же чувствительность варьировала от -50% до $+100\%$ стоимости, т. е. при калибровке были получены минимальное и максимальное значения, равные 6552 и 22 049 долл. при средней расчетной величине 12 417 долл. (до калибровки).

В статье [Embrechts, McNeil, Straumann (1999)] описаны проблемы, возникающие при использовании величины линейной корреляции как единственной меры зависимости случайных величин в условиях неэллипсообразных распределений.

Для улавливания взаимосвязей, соответствующих реально наблюдаемым исходам, в дополнение к корреляции требуется моделирование структуры зависимости, чему успешно отвечают копулы. В частности, авторы приводят пример генерации двух совместных распределений с пределами в форме гамма (3,1) и с одинаковой линейной корреляцией (0,7), но с разными формами взаимосвязи: гауссовской (слева) и Гумбеля (справа) (рис. 1).

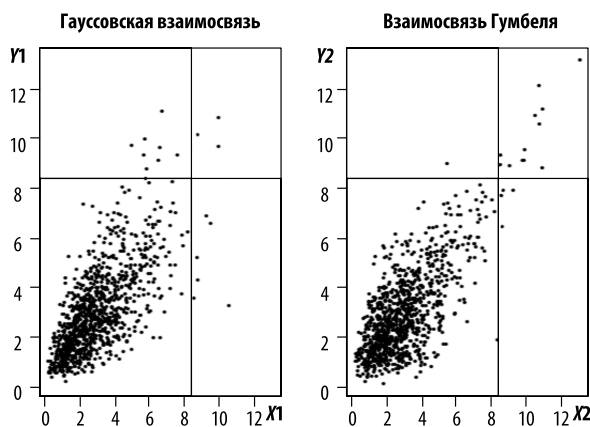


Рис. 1. Генерация совместных распределений

По осям абсцисс отложены значения X_1 и X_2 , а по осям ординат — значения Y_1 и Y_2 .

Следует обратить внимание на то, что при копуле Гумбеля распределение характеризуется большими экстремумами, чем при гауссовской.

В работе подробно обсуждаются виды корреляций (линейная, ранговая, зависимость хвостов) в статическом мире, т. е. не рассматривается серийная корреляция временных рядов. Предпочтение должно отдаваться ранговой корреляции, которая связывает квантили распределения случайных величин, а не их исходы. В статье обобщены требования к мерам зави-

симости (ранговая корреляция, линейная корреляция и т. д.). Обсуждаются проблемы моделирования и имитирования распределений в предположении разных копул.

Ниже систематизирован обзор основных прикладных исследований, в которых показано, что (1) применение копул позволяет лучше уловить характер многомерного распределения, когда маргинальные распределения не гауссовские; (2) в преобладающем большинстве работ выявлен асимметричный (неэллипсообразный) характер совместного многомерного распределения.

Таблица 2

**Обзор литературы по использованию копул
при моделировании совместных распределений**

Работа	Тип данных	Период наблюдений (частота)	Рассмотренные копулы	Лучшая копула
Ane, Kharoubi, 2003	Индексы акций	1987–2000 гг. (дневные)	Гауссовская, Франка, Гумбеля, Клэйтона	Клэйтона
Chollete, Heinen, 2006	Индексы акций	1990–2002 гг. (недельные)	Гауссовская	Смесь гауссовских
Junker, Szimayer, Wagner, 2003	Котировки КО ⁵ США	1982–2001 гг. (ежемесячные)	Гауссовская, Стьюдента, Гумбеля, Франка (обратная)	Франка (обратная)
Fantazzini, 2009	Индексы акций	1994–2000 гг. (дневные)	Нормальная, Стьюдента	Нормальная
Hsu, Tseng, Wang, 2007	Индексы акций	1995–2005 гг.	Гауссовская, Клэйтона, Гумбеля	Гумбеля (для перекрестного хеджа) ⁶ , нормальная (для прямого хеджа)
Kole, Koedijk, Verbeek, 2006	Индексы акций, облигаций, недвижимости	1999–2004 гг. (дневные)	Гауссовская, Стьюдента, Гумбеля	Стьюдента

⁵ КО — казначейские векселя (US Treasury bills).

⁶ *Перекрестный хедж* — открытие встречной позиции в таком активе, цена которого движется сонаправленно цене хеджируемого актива. В прямом хедже оба актива (хеджирующий и хеджируемый) совпадают. Например, для прямого хеджирования срочной сделки на поставку нефти используется обратный контракт (как правило, беспоставочный) на нефть, тогда как при перекрестном хедже данная поставка покрывается сделкой на газ, динамика цены которого сильно связана с ценой нефти.

Работа	Тип данных	Период наблюдений (частота)	Рассмотренные копулы	Лучшая копула
Morone, Cornaglia, Mignola, 2007	Банковские риски	2002–2005 гг. (месячные)	Нормальная, Стьюдента	Стьюдента
Patton, 2006	Обменные курсы	1991–2001 гг. (дневные)	Гауссовская, Клейтона	Клейтона
Rosenberg, Schuermann, 2004	Банковские риски	1994–2002 гг. (квартальные)	Нормальная, Стьюдента	Стьюдента
Tang, Valdez, 2006	Страховые риски	1992–2002 гг. (полугодовые)	Нормальная, Стьюдента, Коши	Коши
Фантаццини, 2008	Акции	2004–2008 гг.	Нормальная, Стьюдента	Стьюдента
Алексеев, Шоколов, Соложенцев, 2006	Акции	2002–2004 гг. (дневные)	Али-Микаэля-Хака, Клейтона	Али-Микаэля-Хака

Хотим также заметить, что на русском языке на момент данной публикации имелись лишь две работы, посвященные использованию копул в управлении рисками: [Фантаццини (2008)] и [Алексеев, Шоколов и Соложенцев (2006)].

3. Методология оценки процентного риска

3.1. Понятие, свойства и виды копулы

Формально **копула** (от лат. *couple* — связка) — это строго возрастающая функция нескольких переменных с областью определения $[0; 1]^n$ и областью значений $[0; 1]$.

$C: [0; 1]^n \rightarrow [0; 1]$ т. е. C — это преобразование, переводящее точку n -мерного гиперкуба в точку на отрезке $[0; 1]$ числовой прямой.

Копулы используются для построения общего многомерного распределения $F_X(x)$ на основе знания маргинальных распределений $F_{X_i}(x_i)$. Данный результат основан на следующей **теореме Шкляра** [Sklar (1959)].

Пусть H — совместная функция распределения двух случайных величин (x, y) , которые имеют частные функции распределения F и G соответственно. Тогда существует такая копула C , что для любого $x, y(-\infty; +\infty)$, т. е.

$$\exists C: H(x, y) = C[F(x); G(y)], \quad \forall x, y \in (-\infty; +\infty). \quad (4)$$

Причем если функции F и G непрерывны, то копула C единственна; в противном случае копула C может быть всегда определена на области значений F и G .

Наоборот, если C — копула, а F и G — частные (маргинальные) функции распределения, то функция H , определенная выше, является функцией совместного распределения с аргументами F и G .

Таким образом, любому совместному n -мерному распределению по определению соответствует функция распределения в форме копулы C , определяемой следующим соотношением:

$$F(X) = C[F_1(x_1); \dots; F_n(x_n)]. \quad (5)$$

Соответственно функция плотности распределения копулы принимает следующий вид:

$$c(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n C(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}. \quad (6)$$

К основным **свойствам копул** относятся следующие (на примере двумерного случая):

1) копула ограничена (*copula is grounded*);

$$\square C(u, 0) = C(0, v) = 0; \quad (7)$$

$$\square C(u, 1) = u; C(1, v) = v; \quad (8)$$

2) любая копула лежит в границах Фреше—Хефдинга (Frechet—Hoeffding);

$$\square \text{Max}(0, u + v - 1) \leq C(u, v) \leq \text{Min}(u, v); \quad (9)$$

3) если анализируемые случайные величины статистически независимы, то верно $C(u, v) = uv$;

4) если (U, V) связаны линейным соотношением, то $C(u, v) = \text{Min}(u, v)$.

Ниже приводится обобщающая табл. 3 функций распределения копул, используемых в данном исследовании.

Таблица 3

Виды копул

Наименование копулы (генератор для архимедовых ⁷ копул)	Формула копулы $C(x_1, \dots, x_n)$	Номер формулы
Гауссовская	$\int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Sigma }} \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \Sigma^{-1} z\right) dz_1, \dots, dz_n,$ <p>где Z_i — функция распределения⁸</p>	(10)

⁷ Нельсон [Nelson (2006), p. 115, 122] описывает происхождение наименования архимедовой копулы, впервые введенное Лингом в 1965 г. [Ling (1965)].

⁸ Необходимо отметить, что копулы эллипсообразных распределений не требуют симметричности частных распределений.

Наименование копулы (генератор для архимедовых копул)	Формула копулы $C(x_1, \dots, x_n)$	Номер формулы
Стьюдента ⁹	$\frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(v\pi)^{n/2}\sqrt{ \Sigma }} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} \left(1 + \frac{1}{v} z^T \Sigma^{-1} z\right)^{\frac{-(v+n)}{2}} dz_1, \dots, dz_n,$ <p>где Z_i — функция распределения; v — число степеней свободы копулы</p>	(11)
Франка ¹⁰ $-\frac{1}{\alpha} \log[1 + e^{\alpha t}(e^{-\alpha} - 1)]$	$-\frac{1}{\alpha} \log \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\alpha x_i} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{n-1}} \right]$	(12)
Клэйтона ¹¹ $(t+1)^{-1/\alpha}$	$\left[\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - n + 1 \right]^{-1/\alpha}$	(13)
Гумбеля ¹² $\exp(-t^{1/\alpha})$	$\exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\log x_i)^{\alpha} \right]^{1/\alpha} \right\}$	(14)

3.2. Методика расчета процентного риска

Данное исследование состоит из трех принципиальных этапов. Первым этапом была оценка моделей условной гетероскедастичности для прогнозирования кривой доходности. Вторым — поиск оптимальной копулы для описания распределения остатков оцененной модели. Третьим — расчет ретроспективного прогноза величины процентного риска (EVEaR) по полученным прогнозам кривой доходности.

Несмотря на высокую популярность подхода аффинных моделей с включенным в них фильтром Калмана (подход фильтрации, впервые предложенный в [Kalman (1960)]), авторы считают более важным учет волн волатильности. К выводу о большей точности прогнозов по моделям GARCH по сравнению с фильтром Калмана также приходят Чудри и Ву [Choudhry, Wu (2007)].

⁹ Копула Стьюдента с одной степенью свободы по аналогии с распределением именуется копулой Коши и относится к категории копул экстремальных значений, поскольку характеризуется высоким параметром зависимости хвостов.

¹⁰ Данный вид связи многомерного распределения был впервые предложен в работе [Frank (1979)]. Копулы Франка могут быть оценены как в обычном логарифме [Tang, Valdez (2006), p. 5–6], так и в натуральном [Nelson (2006), p. 116].

¹¹ Первоначально идея данной формы копулы была предложена в статье [Clayton (1979)], а затем подробнее описана в работе [Cook, Johnson (1981)]. Поэтому данную копулу называют копулой как Клэйтона, так и Кука—Джонсона [Tang, Valdez (2006), p. 6].

¹² Идея формы взаимосвязи, позднее названной копулой Гумбеля, появилась в работе [Gumbel (1960)].

В работе [Пеникас (2008)] было показано, что использование комбинированных прогнозов позволяет повысить среднюю точность прогнозов модели GARCH. Тем не менее данный подход все-таки не позволяет уловить асимметричный характер совместного распределения остатков модели. Поэтому для полного временного ряда были оценены методом максимального правдоподобия 7 копул (гауссовская, Клейтона, Гумбеля, Франка и Стюдента с 1, 3 и 10 степенями свободы). Для каждой из них был рассчитан параметр копулы, а также значения индекса зависимости верхних (λ_U) и нижних (λ_L) хвостов, которые определяются по следующей формуле в двумерном случае [Nelson (2006), p. 214]:

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 100^-} P[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)], \quad (15)$$

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)], \quad (16)$$

где F и G — функции распределения непрерывных случайных величин X и Y соответственно. Степень (-1) означает функцию, обратную к функции распределения.

Таким образом, индекс зависимости верхних (нижних) хвостов является пределом условной вероятности того, что случайная величина Y находится выше t -го квантиля распределения функции G при условии, что X выше t -го квантиля распределения функции F , когда t приближается к 100 (0).

На втором этапе был реализован следующий алгоритм:

- были оценены модели AR(1)-GARCH(1,1) по всей выборке (464 наблюдения) для каждого ряда логарифмированных доходностей¹³ процентных ставок $100 \cdot \ln\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right)$, $t=1, \dots, 464$;
- получены стандартизованные остатки $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$, $t=1, \dots, 464$;
- оценены функции распределения этих остатков;
- по ним оценены 7 разновидностей копул: гауссовская, Стюдента с 1, 3 и 10 степенями свободы, Клейтона, Франка и Гумбеля;
- среди них наилучшая копула была выбрана на основе критериев AIC и BIC.

На третьем этапе была проведена оценка EVEaR и был рассмотрен ретроспективный прогноз на участке с 1 сентября 2008 г. по 17 ноября 2008 г. (55 точек). Алгоритм расчета процентного риска для получения величины EVEaR приводится ниже.

1. Аналогично второму этапу были получены оценки моделей AR(1)-GARCH(1,1) по каждому ряду логарифмированных доходностей процентных ставок $100 \cdot \ln\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right)$, $t=1, \dots, 409$.
2. Получены стандартизованные остатки модели

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}, t=1, \dots, 409.$$

¹³ Как отмечено в [Фантаццини (2008), с. 130], если не умножать на 100, то результирующие кумулятивные функции распределения оцениваются неточно в R и эллипсообразные копулы не могут быть оценены.

3. Оценена предельная функция распределения этих остатков через параметризацию функции Стюдента.
4. Оценен(ы) параметр(ы) копулы выбранного на втором этапе вида.
5. Симулированы 1000 остатков для каждой процентной ставки по оцененной копуле;
6. Получены прогнозы по оцененным моделям AR(1)-GARCH(1,1) на 1 день вперед.
7. Остатки, полученные по копуле, добавлены к прогнозу ставки, полученному по AR(1)-GARCH(1,1). Это даст ряд логарифмов прироста процентных ставок.
8. Переход от логарифмов прироста к процентным ставкам $r_t, t=1, \dots, 409$.
9. Рассчитано ожидаемое изменение приведенной стоимости капитала (ΔEVE_{t+1}) по формуле:

$$\Delta EVE_{t+1} = EVE_{t+1} - EVE_t; \quad (17)$$

$$EVE_t = \sum_i \frac{Gap_{i,t}}{\left(1 + \frac{r_{i,t}}{366} \cdot 100\right)^{\frac{i}{366}}}, \quad (18)$$

где EVE_t — приведенная стоимость капитала банка на момент t ;

$Gap_{i,t}$ — разрыв (гэп) ликвидности (переоценки), или разница между величиной активов и пассивов в момент времени t для интервала i (в рамках данного исследования было выбрано пять интервалов, для которых были взяты соответствующий процентные ставки $r_{i,t}$ для дисконтирования).

Структура разрывов срочной структуры баланса приводится в табл. 4.

Таблица 4

Срочный профиль баланса Сбербанка на 31 декабря 2007 г. (млн руб.)

	Менее 1 месяца	1–6 месяцев	6–12 месяцев	1–3 года	Более 3 лет	С неопределенным сроком	Итого
Активы	959 030	688 068	1 114 041	1 020 340	980 880	166 449	4 928 808
Пассивы	484 959	707 538	417 081	1 030 071	1 647 886	4076	4 291 611
Разрыв ликвидности	474 071	–19 470	696 960	–9731	–667 006	162 373	637 197

10. Взятие 1%-го и 5%-го квантилей распределения изменений EVE (ΔEVE_{t+1}), которое дает величину $EVEaR$ на соответствующих уровнях доверия.
11. Повторение цикла для следующий даты $t + i, i = 1, \dots, 55$, когда пересчет модели включает дополнительную реализацию прошлого периода.

Качество модели при построении ретроспективного прогноза (бэктестинге) определялось по двум параметрам. Во-первых, было рассчитано число «пробоев»¹⁴ границы потерь. Недостатком данного показателя является его нечувствительность к точности прогноза. Поэтому аналогично работам [Pooter, Ravazzolo, Van Dijk (2007)], [Пеникас (2008)] был рассчитан корень из средней ошибки прогноза (RMSPE) по следующей формуле:

$$RMSPE_m = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^{\nu} (\hat{y}_{T+h,m|T-r,m} - y_{T+h-r})^2}, \quad (19)$$

где $RMSPE_m$ — среднеквадратическая ошибка прогноза по модели m ;

$\hat{y}_{T+h,m|T-r,m}$ — прогнозное значение ΔEVE_{t+1} по модели m , построенное на h шагов вперед (рассматривался шаг в 1 день вперед) при прогнозировании в момент $T - r$;

y_{T+h-r} — фактически реализовавшееся значение ΔEVE_{t+1} в момент $T + h - r$;

ν — количество рассматриваемых периодов.

Все расчеты были проведены в программной среде статистического пакета программ R версии 2.8.0, в которой стал доступен пакет анализа многомерных копул (copula), тогда как раньше была возможность оценки только двумерных копул через пакет fscopulae. По ходу исследования везде будут приводиться существенные комментарии по возможностям R для расчета копул. Полный алгоритм, позволяющий воспроизвести ход исследования и лучше освоить подход применения копул в управлении рисками, дан в приложениях 1 и 2.

4. Используемые данные

Для расчета процентного риска в качестве примера был взят разрыв ликвидности¹⁵ в соответствии с ожидаемыми контрактными сроками по аудированной отчетности Сбербанка¹⁶ по состоянию на 31 декабря 2007 г. Предположим, что срочная структура баланса не изменилась с течением времени. С одной стороны, это правдоподобная предпосылка, если в казначействе банка придерживаются правила поддержания единого профиля срочной структуры баланса. С другой стороны, в данном исследовании цель состоит в демонстрации техники расчета процентного риска. Поэтому каждый банк сможет применить описанный здесь подход, используя регулярно обновляемый разрыв переоценки.

Таким образом, приведенный в табл. 4 профиль разрывов стал отправным.

Сумма разрыва (гэпа) ликвидности по активам-пассивам с неопределенным сроком была консервативно поставлена в интервал «до востребования». В табл. 5 приведен профиль баланса, использованный для дальнейшего расчета процентного риска.

¹⁴ «Пробой» границы потерь (от англ. *breach*) — это случай, когда реализация риска (исход случайной величины) превысила границу потерь.

¹⁵ Расчет процентного риска корректнее проводить по разрыву переоценки, но, к сожалению, данная информация отсутствовала в отчетности. Поэтому авторами была взята предпосылка, что доля активов и пассивов с плавающей ставкой составляет незначительную часть валюты баланса банка.

¹⁶ Источник: сайт Сбербанка www.sbrf.ru. Режим доступа: http://www.sbrf.ru/common/img/uploaded/files/info/FS_ue2007_rus_28_04_08_cons.pdf. С. 76.

Итоговый срочный профиль баланса Сбербанка на 31 декабря 2007 г. (млрд руб.)

Разрыв ликвидности	Овернайт (ON)	1 месяц (M ₁)	6 месяцев (M ₆)	1 год (Y ₁)	3 года (Y ₃)
Gap (i)	636,444	-19,470	696,960	-9,731	-667,006

Соответственно срочности разрывов были выбраны процентные ставки: до 1 года — MosPrime¹⁷, начиная с года — доходности бескупонной кривой доходности ОФЗ¹⁸. Общий период наблюдений включал 464 точки (с 17 января 2007 г. по 17 ноября 2008 г.). Приведенные в табл. 6 описательные статистики процентных ставок отражают стилизованные факты о кривой доходности, как, например, рост автокорреляции с увеличением срока, снижение волатильности ставок с ростом срока заимствования.

Таблица 6

Описательные статистики временных рядов процентных ставок

Срок	MosPrime Овернайт res 1	MosPrime 1 месяц res 2	MosPrime 6 месяцев res 3	ОФЗ 1 год res 4	ОФЗ 3 года res 5
Среднее	4,97	6,29	7,10	5,99	6,47
Стандартное отклонение	2,19	2,55	2,49	0,80	0,81
Минимум	2,17	3,97	5,11	4,93	5,76
Максимум	22,67	20,83	21,92	10,08	9,85
Разброс	20,50	16,86	16,81	5,15	4,09
Эксцесс	14,75	10,00	12,86	7,24	4,70
Асимметрия	2,65	2,96	3,42	2,57	2,36
Количество наблюдений	458	463	462	460	460
Количество пропусков ¹⁹	6	1	2	4	4

¹⁷ 6-месячная ставка MosPrime с 27 июня 2008 г. по 24 июля 2008 г. (20 наблюдений) находилась на уровне 6,5%. Малая вариабельность данных отразилась на том, что оценка ковариационной матрицы ошибок при построении AR-GARCH модели не могла быть рассчитана. Поэтому к ставкам на этом промежутке были добавлены случайные числа из промежутка [0,001; 0,004], чтобы при округлении до второго знака эти значения все равно давали 6,5% (Источник: сайт Банка России. Режим доступа: http://www.cbr.ru/hd_base/MosPrime.asp).

¹⁸ О данных о доходности ОФЗ, см. сайт Банка России. Режим доступа: <http://www.cbr.ru/GCurve/>

¹⁹ Пропущенные наблюдения были линейно интерполированы по двум ближайшим доступным значениям.

Окончание табл. 6

Срок	MosPrime Овернайт res 1	MosPrime 1 месяц res 2	MosPrime 6 месяцев res 3	ОФЗ 1 год res 4	ОФЗ 3 года res 5
Статистика Jarque-Bera (p-value)	4646,1 ($< 2,2e-16$)	2558,3 ($< 2,2e-16$)	4021,6 ($< 2,2e-16$)	1495,4 ($< 2,2e-16$)	844,7 ($< 2,2e-16$)
ACF (1)	0,7684	0,9512	0,9516	0,9319	0,9626
ACF (6)	0,5608	0,8104	0,7895	0,7783	0,8554
ACF (24)	0,3848	0,3292	0,3118	0,3988	0,5994

Отметим, что выбор ставок MosPrime из ряда процентных ставок межбанковского рынка был обоснован тем, что именно данная ставка отражает стоимость заимствования средств для банков суверенного рейтинга, к которым относится Сбербанк. Краткое обобщение существующих процентных ставок приводится в табл. 7.

Таблица 7

Сопоставление ключевых ставок межбанковского рынка России²⁰

Ставка	MosPrime	MosIBOR	MIBID	MIBOR	MIACR
Тип ставки кредитования	Индикатив по привлечению (размещению)		Индикатив по привлечению	Индикатив по размещению	Факт по предоставленным кредитам
Для кого	Для первоклассных финансовых институтов	Для всех банков			
Количество банков в опросе	10	16	31		
Общие банки	1) АБН АМРО, 2) «ВестЛБ Восток», 3) ВТБ, 4) Газпромбанк, 5) ММБ («Юникредит»), 6) Банк Москвы, 7) Райффайзенбанк, 8) Сбербанк, 9) Ситибанк				
		1) Альфа-банк, 2) Росбанк, 3) Еврофинанс-Моснарбанк, 4) «Траст»; 5) МДМ, 6) «Петрокоммерц»			
Несовпадающие банки	1) HSBC (RR)	1) ВЭБ	1) БИН-банк, 2) БКФ; 3) ВТБ 24, 4) ДойчеБанк; 5) «Евротраст»; 6) «Зенит», 7) «Инг», 8) Коммерцбанк (Евразия), 9) Межпромбанк, 10) МБРР, 11) «Океан», 12) НРБанк, 13) «Номос», 14) «Развитие-Столица», 15) Пробизнесбанк, 16) ТрансКредитБанк		

²⁰ Источник: www.cbr.ru, www.nva.ru

Ставка	MosPrime	MosIBOR	MIBID	MIBOR	MIACR
Количество отсекаемых цен	2 (по 1 снизу и сверху)	8 (по 4 снизу и сверху)	0		
Принцип расчета	Среднее				Средне-взвешенное
Отсчет срока кредитования от даты ...	Завтра	Сегодня	Вчера ²¹		
Публикуемые сроки ²²	ON, 1W, 2W, 1M, 2M, 3M, 6M	ON, 1W, 2W, 1M, 2M, 3M	ON, 1W, 1M, 3M, 6M, 1Y		
Публикации в системе «Рейтерс»	12:31	12:30	—	—	—

5. Результат эконометрического исследования

В ходе исследования было принято решение остановиться на модели $AR(1) + GARCH(1,1)$ в логарифмах темпов роста, так как, даже несмотря на недостаточно значимые коэффициенты и нестационарность модели ($(\alpha_1 + \beta_1) > 1$), она достаточно хорошо приближает распределение остатков, что иллюстрируют графики, приведенные ниже (см. рис. 2) и тест χ^2 , который не позволяет отвергнуть гипотезу о том, что остатки имеют t -распределение.

Как видно из графиков «квантиль-квантиль» (рис. 3), стандартная модель $AR-GARCH$ недостаточно хорошо описывает хвосты распределения, что увеличивает количество «пробоев» $EVEaR$, как будет показано ниже. Хуже всего t -распределение описывает хвосты самой волатильной ставки овернайт.

По полученному вектору остатков были оценены²³ пятимерные копулы (в соответствие с пятью рассматриваемыми сроками заимствования), результат оценки которых приводится в табл. 8. Необходимо отметить, что параметры всех копул значимы.

Как видно из табл. 8, рост числа степеней свободы в копуле Стьюдента ведет к снижению степени зависимости хвостов. Если копула Клейтона характеризуется наличием зависимости нижних хвостов, то копула Гумбеля — верхних. Гауссовская копула не позволяет уловить за-

²¹ Срок кредитования от даты «вчера» обозначает то, что данные публикуются на следующий день после их оглашения банками.

²² Обозначения сроков заимствований: ON — овернайт (1 день); W — неделя, M — месяц, Y — год.

²³ Все копулы оценивались методом максимального правдоподобия (`fitCopula(..., method="ml")`), так как метод «`trpl`» (он стоит по умолчанию, так как он самый малозатратный по времени) дает такие же оценки значений параметров, но их стандартное отклонение (s.e.) примерно в 1000 раз больше для «`trpl`». Оценки методами «`itau`» и «`irho`» отличаются друг от друга в 3-м знаке после запятой. Они примерно в 10 раз больше оценок «`ml`». В двух последних методах функция правдоподобия не рассчитывается.

Для нормальной копулы начальное значение аргумента «`param`» задано равным нулю (оценки, полученные с помощью функции `gofCopula` и `fitCopula`, совпадают, поэтому была выбрана вторая).

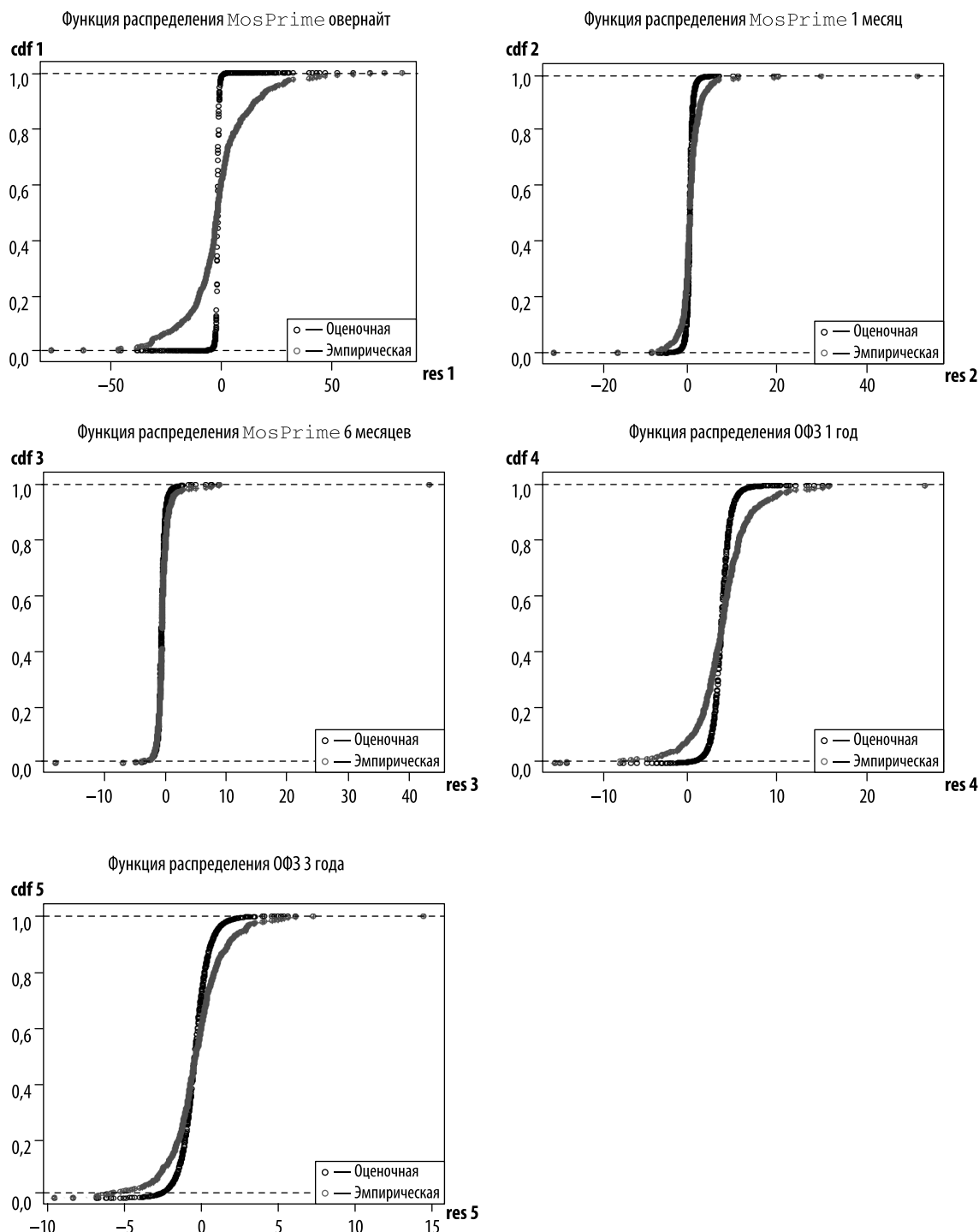


Рис. 2. Эмпирическая и оцененная кумулятивные функции распределения остатков, зависящие от времени (cdf — значения кумулятивной функции распределения)

висимость хвостов, что делает ее применение нецелесообразным для моделирования экстремальных колебаний, характерных для кризисных периодов.

Таблица 8

Сопоставление параметров оценки разных копул

Копула	Параметр копулы	Зависимость нижних хвостов	Зависимость верхних хвостов
C_{norm}	0,1205	0	0
s. e.	(0,0067)	—	—
z-value	(18,0449)	—	—
$C_t (df = 1)$	0,0261	0,3022	0,3022
s. e.	(0,0137)	—	—
z-value	(1,9020)	—	—
$C_t (df = 3)$	0,0772	0,1378	0,1378
s. e.	(0,0126)	—	—
z-value	(6,1374)	—	—
$C_t (df = 10)$	0,1184	0,0300	0,0300
s. e.	(0,0104)	—	—
z-value	(11,3960)	—	—
$C_{Clayton} (\hat{\theta} \in (0, +\infty))$	0,0894	0,0004	0
s. e.	(0,0063)	(0,0002)	—
z-value	(14,2597)	(1,8011)	—
$C_{Frank} (\hat{\vartheta} \in (0, +\infty))$	0,7958	0	0
s. e.	(0,0698)	—	—
z-value	(11,4025)	—	—
$C_{Gumbel} (\hat{\delta} \in [1; +\infty))$	1,0333	0	0,0441
s. e.	(0,0047)	—	(0,0059)
z-value	(218,8280)	—	(7,4031)

«Param» в функции `fitCopula` — это параметр копулы (в частности, коэффициент корреляции для эллиптических копул; $\hat{\theta}$ для копулы Клейтона; $\hat{\vartheta}$ для копулы Франка; $\hat{\delta}$ для копулы Гумбеля).

Начальное значение «param» для t -копулы, копул Клейтона и Гумбеля задано на нулевом уровне. С этим значением с помощью функции `fitCopula` получена оценка параметра, которая подставлена вместо начального значения. Далее функция `fitCopula` запущена повторно, и для полученных оценок рассчитан параметр хвостовой зависимости.

Для t -копулы число степеней свободы задано равным фиксированным значениям (`df.fixed = TRUE`). Иначе при оценке t -копулы методом «ml» выдается ошибка, и расчет не проводится.

Отметим следующую особенность оценки копулы Франка в версии 2.8.0 пакета `Copula`. Данная копула может быть оценена лишь в размерности, не превышающей 6 случайных величин.

Все настройки кроме `method` в функции `fitCopula(...)` были оставлены «по умолчанию».

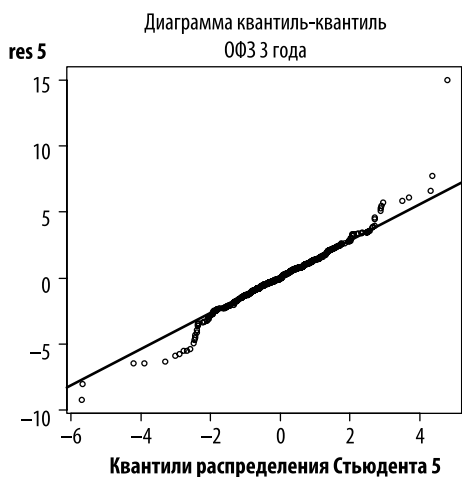
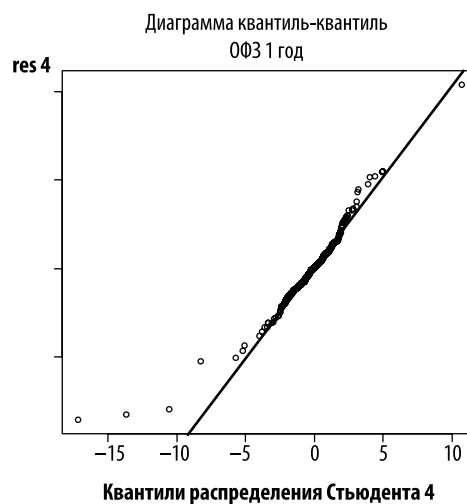
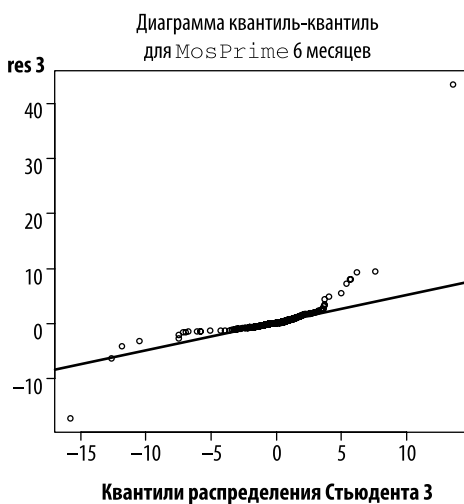
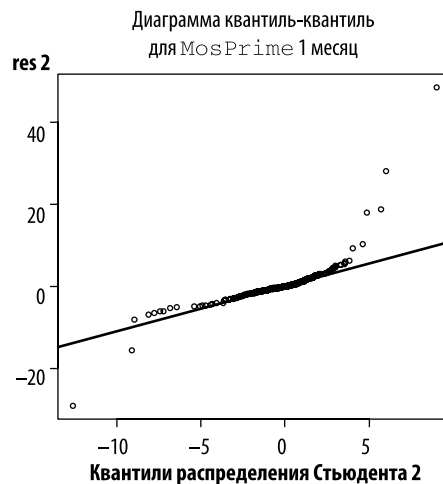
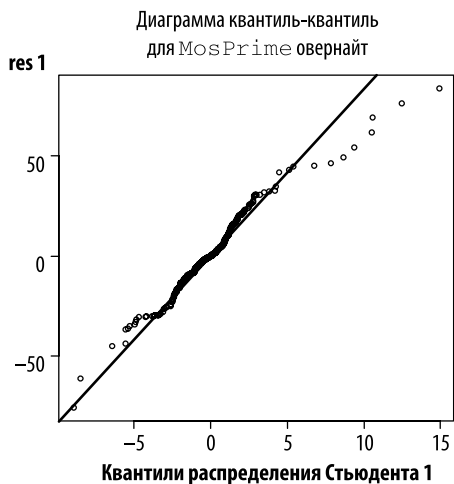


Рис. 3. Графики «квантиль-квантиль» по пяти процентным ставкам (см. табл. 6)

Исходя из значений коэффициентов AIC и BIC, можно прийти к выводу, что наилучшей копулой для оценки совместного распределения остатков модели зависимости процентных ставок является копула Гумбеля (табл. 9). Данный результат соответствует изначальным интуитивным предположениям. Ведь высокая зависимость верхних хвостов для копулы Гумбеля свидетельствует о том, что процентные ставки более склонны одновременно расти, нежели одновременно снижаться (что мы регулярно наблюдали осенью 2008 г. в период пика кризиса ликвидности на российском рынке межбанковских кредитов).

Таблица 9

Результат оценки итоговой модели AR-GARCH

Срок	Овернайт	1 месяц	6 месяцев	1 год	3 года
μ (t-stat)	-0,0923 (-0,226)	-0,0367 (-0,722)	-0,0043 (-0,207)	0,0817 (0,829)	0,0592 (0,955)
ar(1) (t-stat)	0,0620 (1,373)	0,2663* (6,002)	0,0937 (1,810)	-0,2323* (-5,070)	-0,3018* (-6,485)
ω (t-stat)	91,6125 (1,530)	2,1834*** (2,529)	0,1457 (0,884)	0,1021 (0,874)	0,0973 (1,162)
α_1 (t-stat)	1,000*** (1,690)	1,000* (2,982)	1,000** (2,537)	0,0677** (2,343)	0,1448** (2,018)
β_1 (t-stat)	0,5134* (5,343)	0,2795* (3,837)	0,5673* (4,537)	0,9384* (26,946)	0,8600* (12,410)
Количество степеней свободы t-распределения	2,3019* (1,402)	2,3781* (15,458)	2,2862* (18,263)	3,4318* (4,851)	3,8806* (4,783)
AIC	8,0033	3,9587	2,3026	4,7465	3,9049
BIC	8,0569	4,0124	2,3562	4,8001	3,9586
LogLikelihood	-1846,771	-910,4487	-527,0438	-1092,811	-897,992
Тест χ^2 для остатков (p-value)	213 443 (0,2398)	205 572 (0,2439)	186 126 (0,2546)	213 443 (0,2398)	211 591 (0,2408)

* Коэффициенты, значимые на 1%-м уровне.

** Коэффициенты, значимые на 5%-м уровне.

*** Коэффициенты, значимые на 10%-м уровне.

Ячейки, заштрихованные серым цветом, содержат незначимые коэффициенты.

Следующим этапом исследования стал ретроспективный прогноз процентного риска. Результат сравнения фактического значения величины ΔEVE_{t+1} и $EVEaR$, рассчитанного на основе модели AR-GARCH в предположении симметричности и асимметричности распределения остатков модели, приводятся на рис. 4 и в табл. 10.

На рис. 4 наблюдается существенный «пробой» на 38-м наблюдении. Чтобы выявить его причину, проанализируем динамику процентных ставок на рассматриваемом периоде (см. рис. 5). Как видно из графика, резкий скачок краткосрочных процентных ставок 20 октяб-

ря 2008 г. с 7 до 22% спровоцировал резкое снижение приведенной стоимости капитала. Именно данный момент считается кульминацией кризиса ликвидности в российском банковском сообществе, когда потребность в денежных средствах была вызвана необходимостью проведения квартальных выплат по налогу на добавленную стоимость (НДС) и выполнения обязательств по внешним заимствованиям.

Таблица 10

Выбор наилучшей модели копулы

Параметр модели	C_{norm}	C_t			$C_{Clayton}$	C_{Frank}	C_{Gumbel}
		$df = 1$	$df = 3$	$df = 10$			
Значение функции максимального правдоподобия	212,7361	-4191,89	9,4770	0,0133	189,6838	106,3348	230,5258
AIC	-423,4722	8385,7800	-16,9540	1,9734	-377,3676	-210,6696	-459,0516
BIC	-419,3345	8389,9177	-12,8163	6,1111	-373,2299	-206,5319	-454,9139

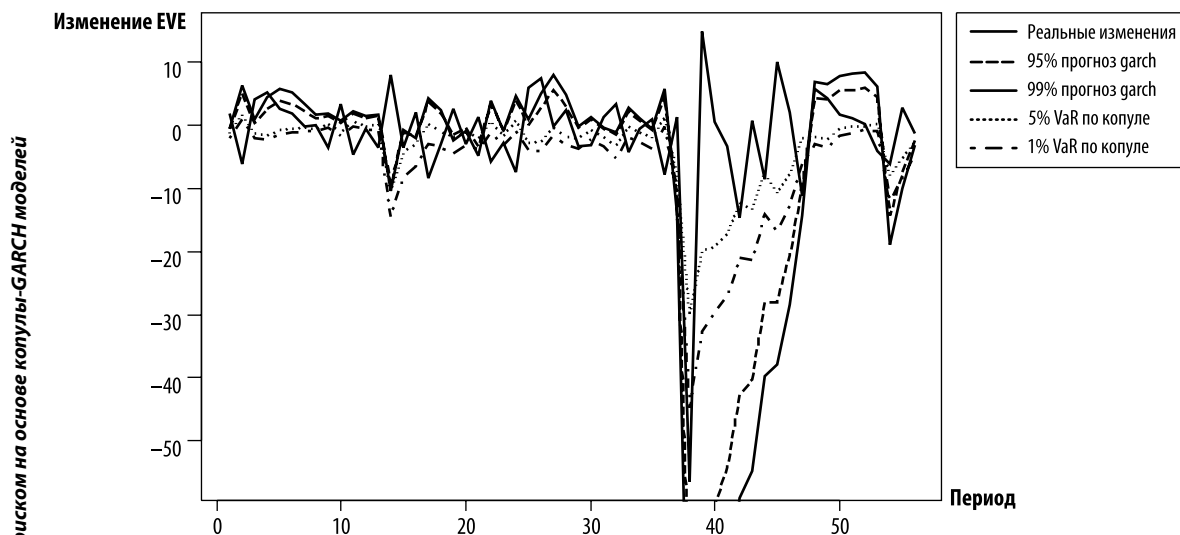


Рис. 4. Реальные и спрогнозированные изменения EVE (млрд руб.)

С точки зрения прогнозирования границы потерь ожидаемой стоимости капитала важно отметить неравнозначность прогнозов по моделям, о чем свидетельствуют значения среднеквадратической ошибки (RMSPE) из табл. 11. Так, модели условной гетероскедастичности характеризовались длинной памятью и медленным приспособлением к изменениям процентных ставок, тогда как модели копулы дали более адекватный результат. Если среднеквадратическая ошибка RMSPE по моделям GARCH составила 22,3 и 30,4% капитала Сбербанка

(равного 637 млрд руб. на 31 декабря 2007 г.) для уровня доверия 95 и 99% соответственно, то по моделям копулы аналогичные значения равны 10,8 и 12,9%.

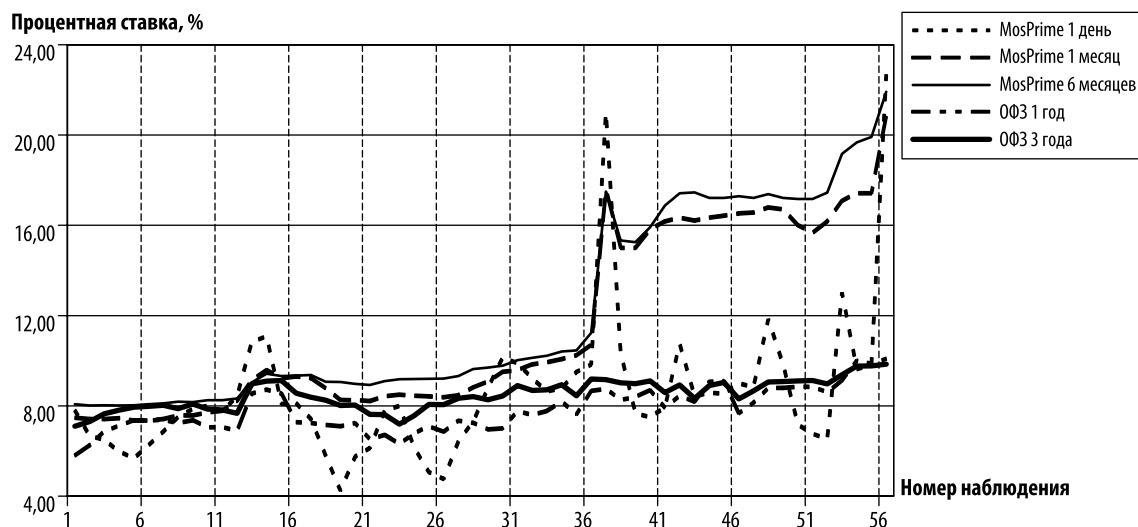


Рис. 5. Динамика процентных ставок в период с 1 сентября 2008 г. по 17 ноября 2008 г.

В целом заметим, что результат оценки через копулу Гумбеля дал более консервативные результаты, которые позволили уменьшить количество «пробоев» (табл. 11).

Таблица 11

Количество «пробоев» для модели EVEaR²⁴

		Уровень доверия для EVEaR					
		95%			99%		
		Количество пробоев	Число правильных прогнозов, %	RMSPE (млрд руб.)	Количество пробоев	Число правильных прогнозов, %	RMSPE (млрд руб.)
Модель AR(1) + GARCH(1,1)		28	49	142,11	27	51	193,30
Копула	Гауссовская	21	62	68,91	14	75	83,17
	Стьюдента с 1 ст. св.	21	62	68,81	13	76	85,72
	Стьюдента с 3 ст. св.	20	64	68,55	15	73	84,18

²⁴ В силу того что остатки по копуле получены путем случайной генерации, число «пробоев» может незначительно колебаться (± 1 «пробой»).

		Уровень доверия для EVEaR					
		95%			99%		
		Количество пробоев	Число правильных прогнозов, %	RMSPE (млрд руб.)	Количество пробоев	Число правильных прогнозов, %	RMSPE (млрд руб.)
	Стьюдента с 10 ст. св.	21	62	68,14	16	71	82,27
	Клэйтона	20	64	68,37	15	73	82,64
	Франка	21	62	68,50	17	69	82,62
	Гумбеля	20	64%	68,67	15	73	82,24

Примечание. Жирным шрифтом выделены наилучшие характеристики копул.

Анализ количества «пробоев» и величины среднеквадратической ошибки позволяет сделать два важных вывода.

1. Использование копул повышает качество оценки границы потерь для изменения ожидаемой стоимости капитала на 7–13% (в зависимости от выбранного уровня доверия).

2. Количество правильных прогнозов существенно ниже, чем выбранный уровень доверия. Даже для лучшей копулы на уровне 99% количество «пробоев» равно 36%. Это может объясняться следующими причинами. Во-первых, как отмечено в работах Фантаццини [Fantazzini (2009), p. 16], [Фантаццини (2008), с. 131], наилучшее приближение квантиля распределения достигается при генерации 100 000 наблюдений, тогда как из-за низкой скорости R в данном исследовании число симуляций было ограничено 1000 точек. Во-вторых, чрезвычайно волатильная ситуация на рынке межбанковского кредитования осенью 2008 г. не позволяла получить высокую точность прогнозов.

Основные выводы

1. Совместное распределение процентных ставок носит асимметричный характер, причем подтверждено, что ставки более склонны одновременно расти, нежели снижаться, что и наблюдается в периоды кризисов.

2. Поэтому моделирование в предположении эллипсообразных распределений необоснованно. Наилучший результат аппроксимации совместного распределения достигается при использовании архимедовой копулы Гумбеля.

3. Далее была рассмотрена методика расчета процентного риска на основе границы потерь ожидаемой стоимости капитала банка (EVEaR).

4. Показано, что использование копулы при оценке процентного риска повышает качество модели (в терминах снижения количества «пробоев») на 7–13%.

Приложение 1. Оценка копулы для расчета EVEaR на всей выборке

```
# ----- загрузим пакеты -----
library(fBasics)
library(fGarch)
library(copula)

# ----- удалим все созданные до этого объекты -----
rm(list=ls(all=TRUE))

# ----- считать данные из текстового файла -----
Data = read.table("C:/Temp/COPULAE/Data.txt", header=T)

# ----- рассчитаем описательные статистики -----
summary(Data[,1:5])

sd(Data[,1:5])
jarqueberaTest(Data[,1], title=NULL, description=NULL)
jarqueberaTest(Data[,2], title=NULL, description=NULL)
jarqueberaTest(Data[,3], title=NULL, description=NULL)
jarqueberaTest(Data[,4], title=NULL, description=NULL)
jarqueberaTest(Data[,5], title=NULL, description=NULL)

ACF1_1=as.vector(acf(Data[,1], lag.max=1, plot=F)[[1]])[2]
ACF1_2=as.vector(acf(Data[,2], lag.max=1, plot=F)[[1]])[2]
ACF1_3=as.vector(acf(Data[,3], lag.max=1, plot=F)[[1]])[2]
ACF1_4=as.vector(acf(Data[,4], lag.max=1, plot=F)[[1]])[2]
ACF1_5=as.vector(acf(Data[,5], lag.max=1, plot=F)[[1]])[2]
c(ACF1_1,ACF1_2,ACF1_3,ACF1_4,ACF1_5)

ACF6_1=as.vector(acf(Data[,1], lag.max=6, plot=F)[[1]])[7]
ACF6_2=as.vector(acf(Data[,2], lag.max=6, plot=F)[[1]])[7]
ACF6_3=as.vector(acf(Data[,3], lag.max=6, plot=F)[[1]])[7]
ACF6_4=as.vector(acf(Data[,4], lag.max=6, plot=F)[[1]])[7]
ACF6_5=as.vector(acf(Data[,5], lag.max=6, plot=F)[[1]])[7]
c(ACF6_1,ACF6_2,ACF6_3,ACF6_4,ACF6_5)

ACF24_1=as.vector(acf(Data[,1], lag.max=24, plot=T)[[1]])[25]
ACF24_2=as.vector(acf(Data[,2], lag.max=24, plot=F)[[1]])[25]
ACF24_3=as.vector(acf(Data[,3], lag.max=24, plot=F)[[1]])[25]
ACF24_4=as.vector(acf(Data[,4], lag.max=24, plot=F)[[1]])[25]
ACF24_5=as.vector(acf(Data[,5], lag.max=24, plot=F)[[1]])[25]
c(ACF24_1,ACF24_2,ACF24_3,ACF24_4,ACF24_5)

# ----- создадим 5 временных рядов -----
on=matrix(100*diff(log(Data[,1])))
m1=matrix(100*diff(log(Data[,2])))
m6=matrix(100*diff(log(Data[,3])))
y1=matrix(100*diff(log(Data[,4])))
y3=matrix(100*diff(log(Data[,5])))
```

```

# --- оценим AR(1)+GARCH(1,1) модель для каждого ряда ----
fit1=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=on, cond.dist = "std",
  trace = F)
summary(fit1)

fit2=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=m1, cond.dist="std",
  trace = F)
summary(fit2)

fit3=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=m6, cond.dist="std",
  trace = F)
summary(fit3)

fit4=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=y1, cond.dist="std",
  trace = F)
summary(fit4)

fit5=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=y3, cond.dist="std",
  trace = F)
summary(fit5)

# ----- получим оценки стандартизированных остатков -----
res1=fit1@fit$series$z
res2=fit2@fit$series$z
res3=fit3@fit$series$z
res4=fit4@fit$series$z
res5=fit5@fit$series$z

# ----- рассчитаем описательные статистики остатков -----
summary(cbind(res1, res2, res3, res4, res5))
sd(cbind(res1, res2, res3, res4, res5))

c(skewness(res1)[[1]], skewness(res2)[[1]], skewness(res3)[[1]], skewness(res4)[[1]],
  skewness(res5)[[1]])
c(kurtosis(res1)[[1]], kurtosis(res2)[[1]], kurtosis(res3)[[1]], kurtosis(res4)[[1]],
  kurtosis(res5)[[1]])
c(jarqueberaTest(res1), jarqueberaTest(res2), jarqueberaTest(res3), jarqueberaTest(res4),
  jarqueberaTest(res5))

# ----- построим графики квантиль-квантиль -----
StudentQuantiles1=rt(463, 2)
qqplot(StudentQuantiles1, res1, xlab=deparse(substitute(StudentQuantiles1)), ylab =
  deparse(substitute(res1)), main = "Диаграмма квантиль-квантиль для res1", plot.it = T, datax = F)
qqline(res1)
StudentQuantiles2=rt(463, 2)
qqplot(StudentQuantiles2, res2, xlab=deparse(substitute(StudentQuantiles2)), ylab =
  deparse(substitute(res2)), main = "Диаграмма квантиль-квантиль для res2", plot.it = T, datax = F)
qqline(res2)

```

```
StudentQuantiles3=rt(463, 2)
qqplot(StudentQuantiles3,res3,xlab=deparse(substitute(StudentQuantiles3)),ylab=
deparse(substitute(res3)), main = "Диаграмма квантиль-квантиль для res3", plot.it = T, datax = F)
qqline(res3)

StudentQuantiles4=rt(463, 3)
qqplot(StudentQuantiles4,res4,xlab=deparse(substitute(StudentQuantiles4)),ylab=
deparse(substitute(res4)), main = "Диаграмма квантиль-квантиль для res4", plot.it = T, datax = F)
qqline(res4)

StudentQuantiles5=rt(463, 4)
qqplot(StudentQuantiles5,res5,xlab=deparse(substitute(StudentQuantiles5)),ylab=
deparse(substitute(res5)), main = "Диаграмма квантиль-квантиль для res5", plot.it = T)
qqline(res5)

# ----- хи-квадрат тест качества подгонки -----
chisq.test(res1,studQuantiles1)
chisq.test(res2,studQuantiles2)
chisq.test(res3,studQuantiles3)
chisq.test(res4,studQuantiles4)
chisq.test(res5,studQuantiles5)

# --- оценим функции распределения вероятностей остатков и #сравним их с эмпирическим распределением -

# -- ПРИМЕЧАНИЕ: "fit1@fit$coef[6]" - это оценка числа
#степеней свободы в функции распределения Стьюдента -----

cdf1=pt(sqrt(fit1@fit$coef[6]/(fit1@fit$coef[6]-2))*res1, fit1@fit$coef[6])
plot(res1,cdf1,main="Функция распределения MosPrime овернайт")
par(col="red", pch=22)
lines(ecdf(res1))
legend("bottomright", c("оцененная", "эмпирическая"), pch=c(1,22), col=c("black", "red"),
text.col="black")

cdf2=pt(sqrt(fit2@fit$coef[6]/(fit2@fit$coef[6]-2))*res2, fit2@fit$coef[6])
plot(res2,cdf2,main="Функция распределения MosPrime 1 месяц")
par(col="red", pch=22)
lines(ecdf(res2))
legend("bottomright", c("оцененная", "эмпирическая"), pch=c(1,22), col=c("black", "red"),
text.col="black")

cdf3=pt(sqrt(fit3@fit$coef[6]/(fit3@fit$coef[6]-2))*res3, fit3@fit$coef[6])
plot(res3,cdf3,main="Функция распределения MosPrime 6 месяцев")
par(col="red", pch=22)
lines(ecdf(res3))
legend("bottomright", c("оцененная", "эмпирическая"), pch=c(1,22), col=c("black", "red"),
text.col="black")
cdf4=pt(sqrt(fit4@fit$coef[6]/(fit4@fit$coef[6]-2))*res4, fit4@fit$coef[6])
```

```

plot(res4,cdf4,main="Функция распределения ОФЗ 1 год")
par(col="red", pch=22)
lines(ecdf(res4))
legend("bottomright", c("оцененная", "эмпирическая"), pch=c(1,22), col=c("black", "red"),
text.col="black")

cdf5=pt(sqrt((fit5@fit$coef[6]/(fit5@fit$coef[6]-2))*res5, fit5@fit$coef[6])
plot(res5,cdf5,main="Функция распределения ОФЗ 3 года")
par(col="red", pch=22)
lines(ecdf(res5))
legend("bottomright", c("оцененная", "эмпирическая"), pch=c(1,22), col=c("black", "red"),
text.col="black")

# ----- запишем полученные оценки в матрицу размерности 463x5
MMM=matrix(c(cdf1,cdf2,cdf3,cdf4,cdf5),ncol=5)

# ----- создадим объект "5-мерная нормальная копула",
# начальное значение коэффициента корреляции ("param") положим #равным нулю -----
CopulaN=normalCopula(0, dim = 5)

# ----- оценим эту копулу методом Inversion of Kendall's Tau -
fitCopNorm=fitCopula(MMM, CopulaN, method="ml")

# ----- показать результат оценки -----
fitCopNorm

# --- оценим 5-мерную копулу Стьюдента с 1 степенью свободы, #т.е. копулу Коши ---
CopulaT1=tCopula(0.02608945, dim = 5, df = 1, df.fixed = TRUE)
fitCopT1=fitCopula(MMM, CopulaT1, method="ml")
fitCopT1
tailIndex(CopulaT1)

# --- оценим 5-мерную копулу Стьюдента с 3 степенями свободы ---
CopulaT3=tCopula(0.07723242, dim = 5, df = 3, df.fixed = TRUE)
fitCopT3=fitCopula(MMM, CopulaT3, method="ml")
fitCopT3
tailIndex(CopulaT3)

# ----- оценим 5-мерную копулу Стьюдента с 10 степенями свободы
CopulaT10=tCopula(0.1184458, dim = 5, df = 10, df.fixed = TRUE)
fitCopT10=fitCopula(MMM, CopulaT10, method="ml")
fitCopT10
tailIndex(CopulaT10)

# ----- оценим 5-мерную копулу Клейтона -----
CopulaC1=claytonCopula(0.08939304, dim = 5)
fitCopC1=fitCopula(MMM, CopulaC1, method="ml")
fitCopC1
tailIndex(CopulaC1)

```

```
# ----- оценим 5-мерную копулу Франка -----
CopulaFr=frankCopula(0.795794, dim=5)
fitCopFr=fitCopula(MMM, CopulaFr, method="ml")
fitCopFr
tailIndex(CopulaFr)

# ----- оценим 5-мерную копулу Гумбеля -----
CopulaGu=gumbelCopula(1.033251, dim=5)
fitCopGu=fitCopula(MMM, CopulaGu, method="ml")
fitCopGu
tailIndex(CopulaGu)

# --- выберем копулу с наименьшим AIC и BIC, которые рассчитаем
#по функции максимального правдоподобия -----
```

Приложение 2. Бэкестинг модели копулы в период кризиса

```
# ----- загрузим пакеты -----
library(fGarch)
library(copula)

# ----- удалим все созданные до этого объекты -----
rm(list=ls(all=TRUE))

# ----- считать данные из текстового файла -----
Data = read.table("C:/Temp/COPULAE/Data.txt", header=T)

# ----- создадим 5 временных рядов -----
on_all = 100*diff(log(Data[,1]))
m1_all = 100*diff(log(Data[,2]))
m6_all = 100*diff(log(Data[,3]))
y1_all = 100*diff(log(Data[,4]))
y3_all = 100*diff(log(Data[,5]))

# ----- зададим исходные значения векторов, которые будут
#содержать реальные и спрогнозированные изменения EVE -----
varCop5 = rep(0,55)
varCop1 = rep(0,55)
garch5 = rep(0,55)
garch1 = rep(0,55)
true_deve = rep(0,55)

# разделим всю выборку на 2 части: 18.01.07-29.08.08/16.11.08 и
#01.09.08/16.11.08-17.11.08
# ----- НАЧАЛО ЦИКЛА -----
for (i in 407:462)
{
on = on_all[1:i]
m1 = m1_all[1:i]
m6 = m6_all[1:i]
```

```

y1=y1_all[1:i]
y3=y3_all[1:i]

# --- оценим AR(1)+GARCH(1,1) модель для каждого ряда -----
fit1=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=on, cond.dist="std", trace=F)
fit2=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=m1, cond.dist="std", trace=F)
fit3=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=m6, cond.dist="std", trace=F)
fit4=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=y1, cond.dist="std", trace=F)
fit5=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), data=y3, cond.dist="std", trace=F)

# ---- рассчитаем прогноз по AR-GARCH-модели на 1 шаг вперед ---
for_on=predict(fit1, n.ahead=1)
for_m1=predict(fit2, n.ahead=1)
for_m6=predict(fit3, n.ahead=1)
for_y1=predict(fit4, n.ahead=1)
for_y3=predict(fit5, n.ahead=1)

# ----- получим оценки стандартизированных остатков -----
res1=fit1@fit$series$z
res2=fit2@fit$series$z
res3=fit3@fit$series$z
res4=fit4@fit$series$z
res5=fit5@fit$series$z

# ----- оценим функции распределения Стьюдента -----
cdf1=pt(sqrt(fit1@fit$coef[6]/(fit1@fit$coef[6]-2))*res1, fit1@fit$coef[6])
cdf2=pt(sqrt(fit2@fit$coef[6]/(fit2@fit$coef[6]-2))*res2, fit2@fit$coef[6])
cdf3=pt(sqrt(fit3@fit$coef[6]/(fit3@fit$coef[6]-2))*res3, fit3@fit$coef[6])
cdf4=pt(sqrt(fit4@fit$coef[6]/(fit4@fit$coef[6]-2))*res4, fit4@fit$coef[6])
cdf5=pt(sqrt(fit5@fit$coef[6]/(fit5@fit$coef[6]-2))*res5, fit5@fit$coef[6])

# ----- запишем полученные оценки в матрицу размерности 463x5
MMM=matrix(c(cdf1,cdf2,cdf3,cdf4,cdf5), ncol=5)

# ----- оценим 5-мерную копулу Гумбеля -----
CopulaGu=gumbelCopula(1.033251, dim=5)
# OR=normalCopula(0, dim=5)
# OR=tCopula(0.02608945, dim=5, df=1, df.fixed=TRUE)
# OR=tCopula(0.07723242, dim=5, df=3, df.fixed=TRUE)
# OR=tCopula(0.1184458, dim=5, df=10, df.fixed=TRUE)
# OR=claytonCopula(0.08939304, dim=5)
# OR=frankCopula(0.795794, dim=5)

fitCopGu=fitCopula(MMM, CopulaGu, method="ml")

# ----- насимулируем остатки с помощью оцененной копулы ---
g_sim=rcopula(CopulaGu, 1000)
# ----- стандартизуем эти остатки -----
sim_g_res1=sqrt((fit1@fit$coef[6]-2)/fit1@fit$coef[6])*g_sim[,1]

```

```

sim_g_res2=sqrt((fit2@fit$coef[6]-2)/fit2@fit$coef[6])*g_sim[,2]
sim_g_res3=sqrt((fit3@fit$coef[6]-2)/fit3@fit$coef[6])*g_sim[,3]
sim_g_res4=sqrt((fit4@fit$coef[6]-2)/fit4@fit$coef[6])*g_sim[,4]
sim_g_res5=sqrt((fit5@fit$coef[6]-2)/fit5@fit$coef[6])*g_sim[,5]

# --- перейдем от логарифмов темпов роста к уровням процентных #ставок -----
sim5_on = Data[i,1]*exp((for_on[,1]+1.644853627*for_on[,3]*sim_g_res1)/100)
sim5_m1 = Data[i,2]*exp((for_m1[,1]+1.644853627*for_m1[,3]*sim_g_res2)/100)
sim5_m6 = Data[i,3]*exp((for_m6[,1]+1.644853627*for_m6[,3]*sim_g_res3)/100)
sim5_y1 = Data[i,4]*exp((for_y1[,1]+1.644853627*for_y1[,3]*sim_g_res4)/100)
sim5_y3 = Data[i,5]*exp((for_y3[,1]+1.644853627*for_y3[,3]*sim_g_res5)/100)

#----- рассчитаем прогнозируемое по копуле изменение EVE --
for5_EVE = (636.444/(1+(sim5_on/366*100))^(1/366))+(-19.470/(1+
(sim5_m1/366*100))^(30/366))+(696.96/(1+(sim5_m6/366*100))^(
(183/366)))+(-9.731/(1+sim5_y1/100))+(-667.006/(1+sim5_y3/100)^3)

EVE_t = (636.444/(1+(Data[i,1]/366*100))^(1/366))+(-19.470/(1+
(Data[i,2]/366*100))^(30/366))+(696.96/(1+(Data[i,3]/366*
100))^(183/366)))+(-9.731/(1+(Data[i,4]/100)))+(-667.006/(1+(Data[i,5]/100))^3)

dEVE5=for5_EVE-EVE_t

# --- перейдем от логарифмов темпов роста к уровням процентных ставок -----
sim1_on = Data[i,1]*exp((for_on[,1]+2.326347874*for_on[,3]*sim_g_res1)/100)
sim1_m1 = Data[i,2]*exp((for_m1[,1]+2.326347874*for_m1[,3]*sim_g_res2)/100)
sim1_m6 = Data[i,3]*exp((for_m6[,1]+2.326347874*for_m6[,3]*sim_g_res3)/100)
sim1_y1 = Data[i,4]*exp((for_y1[,1]+2.326347874*for_y1[,3]*sim_g_res4)/100)
sim1_y3 = Data[i,5]*exp((for_y3[,1]+2.326347874*for_y3[,3]*sim_g_res5)/100)

#----- рассчитаем прогнозируемое по копуле изменение EVE --
for1_EVE = (636.444/(1+(sim1_on/366*100))^(1/366))+(-19.470/(1+
(sim1_m1/366*100))^(30/366))+(696.96/(1+(sim1_m6/366*100))^(
(183/366)))+(-9.731/(1+sim1_y1/100))+(-667.006/(1+sim1_y3/100)^3)

dEVE1=for1_EVE-EVE_t

# ----- рассчитаем 5% (1%) квантиль и сохраним эти прогнозы
varCop5[i-406] = quantile(dEVE5, 0.05, na.rm=T)
varCop1[i-406] = quantile(dEVE1, 0.01, na.rm=T)

# ----- рассчитаем прогноз изменения EVE по AR-GARCH -----
garch5_on = Data[i,1]*exp((for_on[,1]+1.644853627*for_on[,3])/100)
garch5_m1 = Data[i,2]*exp((for_m1[,1]+1.644853627*for_m1[,3])/100)
garch5_m6 = Data[i,3]*exp((for_m6[,1]+1.644853627*for_m6[,3])/100)
garch5_y1 = Data[i,4]*exp((for_y1[,1]+1.644853627*for_y1[,3])/100)
garch5_y3 = Data[i,5]*exp((for_y3[,1]+1.644853627*for_y3[,3])/100)
for_EVE_garch5=(636.444/(1+(garch5_on/366*100))^(1/366))+
(-19.470/(1+(garch5_m1/366*100))^(30/366))+(696.96/(1+
(garch5_m6/366*100))^(183/366)))+(-9.731/(1+(garch5_y1/100)))+(-667.006/(1+(garch5_y3/100))^3)

```

```

garch1_on = Data[i,1]*exp((for_on[,1]+2.326347874*for_on[,3])/100)
garch1_m1 = Data[i,2]*exp((for_m1[,1]+2.326347874*for_m1[,3])/100)
garch1_m6 = Data[i,3]*exp((for_m6[,1]+2.326347874*for_m6[,3])/100)
garch1_y1 = Data[i,4]*exp((for_y1[,1]+2.326347874*for_y1[,3])/100)
garch1_y3 = Data[i,5]*exp((for_y3[,1]+2.326347874*for_y3[,3])/100)

for_EVE_garch1=(636.444/(1+(garch1_on/366*100))^(1/366))+
(-19.470/(1+(garch1_m1/366*100))^(30/366))+(696.96/(1+
(garch1_m6/366*100))^(183/366))+(-9.731/(1+(garch1_y1/100)))+(-667.006/(1+(garch1_y3/100))^3)

garch5[i-406] = for_EVE_garch5-EVE_t
garch1[i-406] = for_EVE_garch1-EVE_t

# ----- рассчитаем реальное изменение EVE -----
EVE_t_1=(636.444/(1+(Data[i+1,1]/366*100))^(1/366))+
(-19.470/(1+(Data[i+1,2]/366*100))^(30/366))+(696.96/(1+
(Data[i+1,3]/366*100))^(183/366))+(-9.731/
(1+(Data[i+1,4]/100)))+(-667.006/(1+(Data[i+1,5]/100))^3)

dEVE_true=EVE_t_1-EVE_t
true_deve[i-406] = dEVE_true
}
# ----- КОНЕЦ ЦИКЛА -----

# ----- рассчитаем количество пробоев 5% (1%) VaR, спрогнозированного по копуле -----
NrOfBreaches_true5=1*(true_deve

NrOfBreaches_true1=1*(true_deve

NrOfBreaches_garch5=1*(true_deve=garch5)
NrOfBreaches_garch1=1*(true_deve=garch1)

sum(NrOfBreaches_true5)
sum(NrOfBreaches_true1)
sum(NrOfBreaches_garch5)
sum(NrOfBreaches_garch1)

cbind(true_deve,garch5,garch1,varCop5,varCop1)

# ----- график реальных и спрогнозированных изменений EVE --
plot(true_deve, type="l", ylab=
"Изменение EVE", xlab="Период")
lines(garch5, lty=5)
lines(garch1, lty=1, lwd=2)
lines(varCop5, lty=3)
lines(varCop1, lty=4, lwd=2)
legend("bottomleft", c("реальн. изм.", "95% прогноз garch", "99% прогноз garch", "5% VaR по копуле",
"1% VaR по копуле"), lty=c(1,5,1,3,4), lwd=c(1,1,2,1,2), text.col="black")

```


Список литературы

Положение Центрального банка Российской Федерации от 10 февраля 2003 г. № 215-П «О методике определения собственных средств (капитала) кредитной организации».

Положение Центрального банка Российской Федерации от 14 ноября 2007 г. № 313-П «О порядке расчета кредитными организациями величины рыночного риска».

Алексеев В. В., Шоколов В. В., Соложенцев Е. Д. Логико-вероятностное моделирование портфеля ценных бумаг с использованием копул // Управление финансовыми рисками. 2006. № 3. С. 272–283.

Пеникас Г. И. Прогнозирование кривой доходности в задачах управления активами и пассивами банка // Прикладная эконометрика. 2008. № 4 (12).

Фантаццини Д. Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // Прикладная эконометрика. 2008. № 2 (10). С. 91–137.

Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А. Кривая бескупонной доходности на рынке ГКО-ОФЗ // Рынок ценных бумаг. 2006. № 3. С. 68–77.

Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А., Никитин А. Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004. № 11 (С. 43–50); № 13 (С. 44–52).

Чеготов М. В., Лобанов А. А. Построение кривой доходности на основе аналитического обращения функциональной связи между рыночными данными и параметрами облигации // Управление финансовыми рисками. 2006. № 4 (8). С. 336–342.

Ane Th., Kharoubi C. Dependence Structure and Risk Measure // Journal of Business. 2003. № 3 (76). P. 411–438.

Arnold T., Bertus M., Godbey J. A Simplified Approach to Understanding the Kalman Filter Technique // Engineering Economist. 2008. № 2 (53). P. 140–155.

BCBS. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. 2006.

BCBS. Principles for the Management and Supervision of Interest Rate Risk. 2004.

Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons Ltd. 2004.

Chollete L., Heinen A. Frequent Turbulence? A Dynamic Copula Approach. 2006. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=968923>.

Clayton D. A Model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. Biometrika. 1978. № 65. P. 141–151.

Clemen R., Reilly T. Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis // Management Science. 1999. № 2 (45). P. 208–224.

Choudhry T., Wu H. Time-Varying Beta and Forecasting UK Company Stock Returns: GARCH Models vs Kalman Filter Method. 2007. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=963452>.

Cook R. D., Johnson M. E. A family of distributions for modeling non-elliptically symmetric multivariate data. J. of the Royal Statistical Society. 1981. № 43. P. 210–218.

Dai Q., Singleton K. Specification Analysis of Affine Term Structure Models. 1998. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=139422>.

Duffie D., Kan R. A Yield-Factor Model of Interest Rates // Mathematical Finance. 1996. № 4(6). P. 376–406.

Embrechts P., McNeil A., Straumann D. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. 1999. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.math.ethz.ch/~straumann/preprints/pitfalls.pdf>.

- Fantazzini D.* Dynamic Copula Modelling for Value at Risk // *Frontiers in Finance and Economics*, 2009 (Forthcoming). [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=944172>
- Frank M. J.* On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematica*. 1979. № 19. P. 194–226.
- Gumbel E. J.* Bivariate exponential distributions. *J. of the American Statistical Association*. 1960. № 55. P. 698–707.
- Junker M., Szimayer A., Wagner N.* Nonlinear Term Structure Dependence: Copula Functions, Empirics, and Risk Implications. 2003. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=407240>
- Hsu Ch.-Ch., Tseng Ch.-P., Wang Y.-H.* Dynamic Hedging with Futures: A Copula-based GARCH Model. 2007. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=1083890>
- Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. of basic Engineering*. 1960. № 82. P. 34–45.
- Kole E., Koedijk K., Verbeek M.* Selecting Copulas for Risk Management. 2006. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ssrn.com/abstract=920870>
- Ling C.-H.* Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*. 1965. № 12. P. 189–212.
- Longin F., Solnik B.* Correlation Structure of International Equity Markets During Extremely Volatile Periods. Mimeo. Group HEC. 1998.
- Morone M., Cornaglia A., Mignola G.* Economic Capital Assessment via Copulas: Aggregation and Allocation of Different Risk Types. 2007. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.riskwhoswho.com/Resources/MignolaGiulio1.pdf>
- Nelson C., Siegel A.* Parsimonious Modeling of Yield Curves // *J. of Business*. 1987. № 4 (60). P. 473–489.
- Nelsen R.* An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer. New York. 2006.
- Patton A.* Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence // *International Economic Review*. 2006. № 2 (47). P. 527–556.
- Prefontaine J., Desrochers J.* How Useful Are Banks' Earnings-At-Risk and Economic Value Of Equity-At-Risk Public Disclosures? // *International Business & Economics Research Journal*. 2006. № 5 (9). P. 87–94.
- Rosenberg J., Schuermann T.* A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat Tailed Risks. FRB of NY. Staff Report No. 185. 2004. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/04/0414.pdf>
- Sklar A.* Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris*. 1959. № 8. P. 229–31.
- Pooter M., Ravazzolo F., Van Dijk D.* Predicting the Term Structure of Interest Rates. Incorporating parameter uncertainty, model uncertainty and macroeconomic information. 2007. <http://ssrn.com/abstract=967914>
- Tang A., Valdez E.* Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas. Sydney. 2006. [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf
- Vasicek O. A.* An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*. 1977. № 5. P. 177–188.
- United States General Accounting Office (USGAO). Risk-Based Capital Regulatory and Industry Approaches to Capital and Risk, Report to the Chairman, Committee on Banking, and Urban Affairs, U. S. Senate and the Chairman, Committee on Banking and Financial Services, House of Representatives, GAO/GGD-98-153. 1998. [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.gao.gov/cgi-bin/getrpt?GGD-98-153